

ΘΕΜΑ 1.

α) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Να εξετάσετε αν ο πίνακας A είναι θετικός. Σε περίπτωση που είναι, να βρείτε πίνακα $B \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $B^2 = A$.

β) Να ορίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in \mathbb{M}_\nu(\mathbb{R})$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

γ) Θεωρούμε τους πίνακες $P, A \in \mathbb{M}_\nu(\mathbb{C})$, όπου P ένας ερμιτιανά ορθογώνιος πίνακας. Να αποδείξετε ότι ο A είναι κανονικός αν και μόνον αν ο πίνακας P^*AP είναι κανονικός, όπου P^* ο αναστροφοςυζυγής του P .

(Μόρια 30)

ΘΕΜΑ 2.

Θεωρούμε V, W υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$. Πότε ο W λέγεται ορθοσυμπληρωματικός του V ;
Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, όπου

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + 3\alpha_3\beta_3$$

Να υπολογίσετε τον ορθοσυμπληρωματικό χώρο W του υπόχωρου V του $\mathbb{R}^3$ (ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο), όπου

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}.$$

(Μόρια 15)

ΘΕΜΑ 3.

α) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Με χρήση του Θεωρήματος Cayley-Hamilton να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα A .

β) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Με χρήση του Θεωρήματος Cayley-Hamilton να αποδείξετε ότι $A^{-1} = -A^3 + 2A$.

γ) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Να αποδείξετε ότι $A^{593} - 2A^{15} + A = \mathbb{O}$.

(Μόρια 30)

ΘΕΜΑ 4.

Να προσδιορίσετε το είδος της επίπεδης καμπύλης που ορίζεται από την εξίσωση

$$5x^2 + 6xy - 3y^2 - 22x + 6y - 20 = 0.$$

Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την παραπάνω καμπύλη.

(Μόρια 15)

ΘΕΜΑ 5.

Θεωρούμε ενδομορφισμό $\varphi : V \longrightarrow V$ όπου V Ερμιτιανός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Πότε ο φ καλείται αυτοπροσαρτημένος;

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αν ο φ είναι αυτοπροσαρτημένος, τότε όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί.

(Μόρια 10)

Καλή επιτυχία !!!
