

**ΘΕΜΑ 1.**

A) Να υπολογίσετε όλες τις κανονικές υποομάδες της  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$  και στη συνέχεια να γίνει το διάγραμμα Hasse αυτών. Πόσες υποομάδες τάξης 10 βρήκατε; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

(Μόρια 15)

B) Κάθε αβελιανή ομάδα είναι κυκλική.

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως σωστό ή λάθος. Στη συνέχεια να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

(Μόρια 10)

**ΘΕΜΑ 2.**

Θεωρούμε τις μεταθέσεις

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 10 & 9 & 8 & 6 & 7 & 12 & 11 \end{pmatrix}, \tau = (3 \ 9 \ 5 \ 4), \rho = (3 \ 9 \ 5 \ 4)(3 \ 9) \in S_{12}.$$

α) Να προσδιορίσετε τη μετάθεση  $\kappa = \sigma\tau\rho^{-1} \in S_{12}$  και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μετάθεση  $\kappa^{1270}$ .

β) Να εξετάσετε αν η μετάθεση  $\kappa^{1270}\rho^{-2025}$  είναι άρτια ή περιττή.

(Μόρια 20)

**ΘΕΜΑ 3.**

Θεωρούμε την ομάδα πηλίκου

$$G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6) / \langle (\overline{0}_4, \overline{5}_6) \rangle.$$

α) Να υπολογίσετε τα στοιχεία της ομάδας πηλίκου  $G$ . Με ποια γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη; Να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(Μόρια 20)

β) Να υπολογίσετε την τάξη του στοιχείου  $(\overline{2}_4, \overline{2}_6) + \langle (\overline{0}_4, \overline{5}_6) \rangle \in G$ .

(Μόρια 10)

**ΘΕΜΑ 4.**

α) Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων  $\varphi : R \rightarrow S$ . Να ορίσετε τα σύνολο  $\ker \varphi$  και  $\operatorname{im} \varphi$ . Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το σύνολο  $\ker \varphi$  είναι ιδεώδες του δακτυλίου  $R$ .

(Μόρια 10)

β) Έστω  $I, J$  ιδεώδη του  $R$  τέτοια ώστε  $I + J = R$ . Να αποδείξετε ότι

$$R/(I \cap J) \simeq R/I \times R/J$$

(Μόρια 15)