

ΘΕΜΑ 1.

Θεωρούμε $\mathbb{K}$ σώμα και έστω ο πολυωνυμικός δακτύλιος $\mathbb{K}[x]$.

A) Να αποδείξετε ότι κάθε ιδεώδες του $\mathbb{K}[x]$ είναι κύριο.

(Μόρια 10)

B) Θεωρούμε τα πολυώνυμα $\varphi, \vartheta \in \mathbb{K}[x]$. Να αποδείξετε ότι

$$\langle \varphi \rangle \cap \langle \vartheta \rangle = \langle \varepsilon \rangle,$$

όπου ε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των πολυωνύμων φ και ϑ .

(Μόρια 10)

ΘΕΜΑ 2.

Έστω το πολυώνυμο $\vartheta(x) \in R[x]$, όπου R δακτύλιος με $\deg \vartheta(x) = \nu \in \mathbb{N}$. Ο δακτύλιος R περιέχει το πολύ ν θέσεις μηδενισμού του πολυωνύμου ϑ .

Χαρακτηρίστε την παραπάνω πρόταση ως Σωστή ή Λάθος αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό σας.

(Μόρια 10)

ΘΕΜΑ 3.

A) Να δώσετε τον ορισμό ενός πρώτου και τον ορισμό ενός μέγιστου ιδεώδους ενός δακτυλίου R . Στη συνέχεια να δώσετε παράδειγμα ενός πρώτου ιδεώδους, ενός μέγιστου ιδεώδους, ενός μη πρώτου ιδεώδους και ενός μη μέγιστου ιδεώδους. Να αιτιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας.

(Μόρια 10)

B) Θεωρούμε I ιδεώδες ενός δακτυλίου R . Να αποδείξετε ότι το I είναι πρώτο ιδεώδες αν και μόνον αν ο δακτύλιος πηλίκο R/I είναι ακέραια περιοχή.

(Μόρια 10)

ΘΕΜΑ 4.

A) Θεωρούμε το σύνολο $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, e^{\frac{2\pi i}{5}})$. Να υπολογιστεί ο βαθμός της επέκτασης $E|\mathbb{Q}$.

(Μόρια 10)

B) Δίνεται η απλή επέκταση $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})|\mathbb{Q}$, όπου p, q διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί. Προσδιορίσετε ένα πρωταρχικό στοιχείο αυτής α , το α^{-1} (αν υπάρχει) και μία $\mathbb{Q}$ -βάση του $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(Μόρια 20)

ΘΕΜΑ 5.

A) Θεωρούμε ιδεώδη I, J ενός δακτυλίου R τέτοια ώστε $R = I + J$. Να αποδείξετε ότι

$$R/(I \cap J) \cong R/I \times R/J$$

(Μόρια 10)

B) Να εξετάσετε αν ισχύει:

$$\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + x + 2 \rangle \cong \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle,$$

όπου $x^2 + x + 2, x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

(Μόρια 10)