

ΘΕΜΑ 1.

A) Να εξεταστεί αν οι αριθμοί $\sqrt[5]{3}$ και $1 + 3i$ είναι αλγεβρικοί υπεράνω του $\mathbb{Q}$. Είναι ο αριθμός $\sqrt[4]{2}$ αλγεβρικός υπεράνω του $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; Να δικαιολογηθούν πλήρως οι απαντήσεις σας.

(Μόρια 15)

B) Δίνονται οι $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Να βρεθεί ο βαθμός της επέκτασης $\mathbb{Q}(\alpha)$ με $\alpha^n = 2$ υπεράνω του $\mathbb{Q}$ και ο βαθμός της επέκτασης $\mathbb{Q}(\beta)$ με $\beta^8 = 1$ υπεράνω του $\mathbb{Q}$.

(Μόρια 15)

ΘΕΜΑ 2.

A) Δίνεται το ιδεώδες $I = \langle x^4 - 4x^3 + 6 \rangle \subseteq \mathbb{Z}[x]$. Να εξετάσετε αν ο δακτύλιος πηλίκου $\mathbb{Z}[x]/I$ είναι ακέραια περιοχή.

(Μόρια 10)

B) Θεωρούμε τον δακτύλιο $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{Z} \times \{0\} \subseteq R$ είναι πρώτο ιδεώδες του R , το οποίο δεν είναι μέγιστο.

(Μόρια 10)

ΘΕΜΑ 3.

Να αποδείξετε ότι

$$\mathbb{K}[x]/\langle x^2 - x \rangle \simeq \mathbb{K} \times \mathbb{K},$$

όπου $\mathbb{K}[x]$ ο δακτύλιος πολυωνύμων υπεράνω σώματος $\mathbb{K}$.

(Μόρια 15)

ΘΕΜΑ 4.

Δίνεται η επέκταση $E|\mathbb{Q}$, όπου $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{2})$.

A) Πότε μία επέκταση ονομάζεται απλή; Να αποδείξετε ότι η επέκταση $E|\mathbb{Q}$ είναι απλή.

(Μόρια 10)

B) Αν α το πρωταρχικό στοιχείο αυτής, να προσδιορίσετε το $\text{irr}(\alpha, \mathbb{Q})$, το α^{-1} καθώς και μία $\mathbb{Q}$ -βάση του $\mathbb{Q}(\alpha)$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η επέκταση $E|\mathbb{Q}$ είναι σώμα.

(Μόρια 10)

ΘΕΜΑ 5.

Όταν ένα στοιχείο α είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}(\beta)$, τότε το στοιχείο β είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}(\alpha)$, όπου $\mathbb{K}$ τυχαίο σώμα.

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Σωστό ή Λάθος. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

(Μόρια 15)