Άσκηση 1. Δείξτε ότι για κάθε $A, B, C, D \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ ισχύει:

$$2A + 3D + 3(A - B - 2C) - 6(-C - D) + (-5A + 3B - 9D) = \mathbb{O}.$$

Άσκηση 2. Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

α) Να υπολογίσετε σε κάθε μία περίπτωση τους παρακάτω πίνακες:

$$AB, BA, AC, A(BC), A^2, C^2.$$

β) Να υπολογίσετε τον πίνακα:

$$AB - A(BC)C^{2024}.$$

Άσκηση 3. Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε, σε περίπτωση που ορίζονται, τα παρακάτω γινόμενα των πινάκων:

$$AB, BA, BC, CB, ABC.$$

Άσκηση 4. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

α) Να αποδείξετε ότι $A^3 + B^3 = \mathbb{O}$.
β) Να υπολογίσετε τον πίνακα $A^{2024} + B^{2024}$.

Άσκηση 5. Να βρείτε έναν 2×2 πίνακα A, τέτοιο ώστε $A^2 = A$ με $A \neq \mathbb{O}_2$ και $A \neq I_2$.
(Σημείωση: Ένας πίνακας $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ με την παραπάνω ιδιότητα, καλείται ταυτοδύναμος).

Άσκηση 6. Να υπολογίσετε όλους τους 2×2 πίνακες που αντιμετατίθενται με τον πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 7. Θεωρούμε τους πίνακες $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. Να αποδείξετε ότι αν οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται τότε

$$A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right).$$

Άσκηση 8. Να υπολογίσετε όλους τους 2×2 πίνακες που αντιμετατίθενται με τον πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 9. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα $\left(A^t A\right)^{2024}$.

Άσκηση 10. Δίνεται ο ταυτοδύναμος πίνακας $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ (βλέπε άσκηση 5). Να προσδιορίσετε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας $(I_n - \lambda A)$ να είναι ταυτοδύναμος.

Άσκηση 11. Να προσδιοριστούν όλοι οι πίνακες $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα $A^2 = \mathbb{O}$.

Άσκηση 12. Δίνονται οι συμμετρικοί πίνακες $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ με την ιδιότητα $AB = BA$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας (AB) είναι συμμετρικός.

Άσκηση 13. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα A^n, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 14. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα A^n, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 15. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{2024}.