

Άσκηση 1. Δίνεται ο πίνακας :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- α) Να εξετάσετε αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε $AB = I_3$.
β) Να εξετάσετε αν υπάρχει πίνακας C τέτοιος ώστε $CA = I_2$.

Άσκηση 2. Δίνεται ο πίνακας :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε τους πίνακες A^3, A^{10}, A^{2024} .

Άσκηση 3. Δίνεται ο πίνακας :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να αποδείξετε ότι $A^{-1} = A$.

Άσκηση 4. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{M}_\nu(\mathbb{R})$ καλείται ταυτοδύναμος αν ισχύει $A^2 = A$. Να αποδείξετε ότι αν ο A είναι ταυτοδύναμος πίνακας, τότε ο πίνακας $2A - I_\nu$ είναι αντιστρέψιμος με

$$(2A - I_\nu)^{-1} = 2A - I_\nu.$$

Άσκηση 5. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{M}_{\nu \times \nu}(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα $A^6 - A^5 + A^4 - A^3 + A^2 - A + I_\nu = \mathbb{O}$. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = -A^6$.

Άσκηση 6. Θεωρούμε τους αντιστρέψιμους πίνακες $A, B, A + B \in \mathbb{M}_{\nu \times \nu}(\mathbb{R})$. Να δειχθεί ότι και ο πίνακας $A^{-1} + B^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος με

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B.$$

Άσκηση 7. Θεωρούμε τους πίνακες $A \in \mathbb{M}_{\nu \times \mu}(\mathbb{R})$ και $B \in \mathbb{M}_{\mu \times \nu}(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε ο πίνακας $I_\nu - AB$ είναι αντιστρέψιμος. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $I_\mu - BA$ είναι αντιστρέψιμος με

$$(I_\mu - BA)^{-1} = I_\mu + B(I_\nu - AB)^{-1}A.$$

Άσκηση 8. Δίνεται ο πίνακας :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 1 & 4 & 13 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- α) Να υπολογίσετε την ισχυρά (ανηγμένη) κλιμακωτή μορφή του και τη βαθμίδα του.
 β) Να γραφούν όλοι οι στοιχειώδεις πίνακες που χρησιμοποιούνται.

Άσκηση 9. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -9 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- α) Να υπολογίσετε την ισχυρά (ανηγμένη) κλιμακωτή μορφή του και τη βαθμίδα του.
 β) Να γραφούν όλοι οι στοιχειώδεις πίνακες που χρησιμοποιούνται.

Άσκηση 10. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- α) Να υπολογίσετε την ισχυρά (ανηγμένη) κλιμακωτή μορφή του και τη βαθμίδα του.
 β) Να γραφούν όλοι οι στοιχειώδεις πίνακες που χρησιμοποιούνται.

Άσκηση 11. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε την ισχυρά (ανηγμένη) κλιμακωτή μορφή του πίνακα A και τη βαθμίδα αυτού.

Άσκηση 12. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Να αποδείξετε ότι $A^4 = I_3$. Να συμπεράνετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσετε τον A^{-1} .