ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ	ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ	ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ	(ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑ, ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓ. ΤΑΤΑΚΗΣ Χ.	ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ, ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ)
	22/10/2024

Άσκηση 1. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να εξετάσετε αν ο πίνακας A είναι ανιιστρέψιμος. Σε περίπτωση που είναι:

α) Να υπολογίσετε τον A^{-1} με τη βοήθεια της απαλοιφής Gauss.

β) Να υπολογίσετε τον A^{-1} με τη βοήθεια του προσαρτημένου adj$A$.

Άσκηση 2. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Να εξετάσετε αν ο πίνακας A είναι ανιιστρέψιμος. Σε περίπτωση που είναι:

α) Να υπολογίσετε τον A^{-1} με τη βοήθεια της απαλοιφής Gauss.

β) Να υπολογίσετε τον A^{-1} με τη βοήθεια του προσαρτημένου adj$A$.

Άσκηση 3. Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 11 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Να εξετάσετε αν οι πίνακες A, B και AB είναι αντιστρέψιμοι. Στις περιπτώσεις που οι πίνακες αντιστρέφονται, να υπολογίσετε τους A^{-1}, B^{-1} και $(AB)^{-1}$.

α) Να υπολογίσετε (στις περιπτώσεις που ορίζονται) τους A^{-1}, B^{-1} και $(AB)^{-1}$ με τη βοήθεια της απαλοιφής Gauss.

β) Να υπολογίσετε (στις περιπτώσεις που ορίζονται) τους A^{-1}, B^{-1} και $(AB)^{-1}$ με τη βοήθεια των προσαρτημένων adj$A$, adj$B$ και adj(AB).

Άσκηση 4. Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 11 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε τους προσαρτημένους πίνακες adj$A$, adj$B$, adj(AB).

Άσκηση 5. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν οι αντίστροφοι αυτών και στη συνέχεια να τους γράψετε ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Άσκηση 6. Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ \alpha & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε (όπου ορίζεται) τον A^{-1}.

Άσκηση 7. Να υπολογίσετε (σε περίπτωση που ορίζεται) τον αντίστροφο του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\nu\times\nu}(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 8. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} 3x - 4y + z & = 8 \\ x + 2y & = 0 \\ 3y + 2z & = -7 \\ 3x + 2z & = 2 \end{cases}, \ \Sigma_2 : \begin{cases} x + y - 3z & = -1 \\ -2x + y - 2z & = 1 \\ x + y + z & = 3 \\ x + 2y - 3z & = 1 \end{cases}, \ \Sigma_3 : \begin{cases} x - y - 2z + 5w & = 6 \\ 3x - 3y - 6z - 2w & = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 9. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x \ + \ \ \alpha y \ + \ \ \ \ 2z \ &= 0 \\ -x \ + \ \ 2y \ + \ \ \ \ \alpha z \ &= 0 \\ \alpha x \ + \ -3y \ + (\alpha+1)z \ &= 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 10. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 \ &= -2\kappa + 1 \\ x_2 + x_3 \ &= -2\kappa \\ x_4 - x_5 \ &= -\kappa + 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \ &= -2\kappa + 2 \end{aligned}$$

Άσκηση 11. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad z &= 1 \\ x + \lambda y + \mu z &= 2 \\ x + \lambda^2 y + \mu^2 z &= 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 12. Κάνοντας χρήση αποκλειστικά της Άσκησης 7, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\nu &= 1 \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_\nu &= 1 \\ &\vdots \\ x_\nu &= 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 13. Να λυθούν με τη μέθοδο Cramer τα παρακάτω συστήματα:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} 2x - y + 3z &= 3 \\ x - 2y + 4z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 1 \end{cases}, \ \Sigma_2 : \begin{cases} 2x + w &= 3 \\ -x + 3y + z - 5w &= 0 \\ y - w + 4x + 2z &= 0 \\ -z + 2y &= 9 \end{cases}, \ \Sigma_3 : \begin{cases} x - 2y - 3z &= 2 \\ y + 3z &= 5 \\ 2x + y + 8z &= -4 \end{cases}$$

Άσκηση 14. Ένας πίνακας λέγεται αντισυμμετρικός αν $A^t = -A$. Να αποδείξετε ότι αν ο ν είναι περιττός αριθμός, τότε ένας αντισυμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{M}_{\nu\times\nu}(\mathbb{R})$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 15. Να υπολογίσετε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 16. Να υπολογίσετε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}, \ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\}.$$

Άσκηση 17. Να υπολογίσετε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1+\beta & 1+\gamma \\ 1+2\alpha & 1+2\beta & 1+2\gamma \\ 1+3\alpha & 1+3\beta & 1+3\gamma \end{vmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 18. Να υπολογίσετε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix}, \ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 19. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 20. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 21. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\nu\times\nu}(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 22. Να υπολογίσετε την $(\nu \times \nu)$-ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \nu & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \nu & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \nu \end{vmatrix}$$

Άσκηση 23. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0, \ x \in \mathbb{Z}.$$

Άσκηση 24. Να δειχθεί ότι ο προσαρτημένος πίνακας adj(A) ενός πίνακα A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 25. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \nu-1 & \nu-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \nu-1 & \nu \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\nu\times\nu}(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 26. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\nu\times\nu}(\mathbb{R}).$$

Να υπολογίσετε (σε περίπτωση που ορίζεται) τον A^{-1}.

Άσκηση 27. Δίνεται ο πίνακας

$$\Delta_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\nu\times\nu}(\mathbb{R}).$$

α) Να αποδείξετε ότι $|\Delta_\nu| = |\Delta_{\nu-1}| - |\Delta_{\nu-2}|$.
β) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα Δ_{2021}.

Άσκηση 28. Δίνεται ο πίνακας $A \in \mathbb{M}_{\nu\times\nu}(\mathbb{R})$ για τον οποίο ισχύει $A^2 = -2A$. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα A.

Άσκηση 29. Αν $x, \alpha \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & x & x & \cdots & x & x \\ x & \alpha & x & \cdots & x & x \\ x & x & \alpha & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & \alpha & x \\ x & x & x & \cdots & x & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\nu\times\nu}(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 30. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$\Delta_\nu = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\nu\times\nu}(\mathbb{R}).$$