Άσκηση 1. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με τις πράξεις:

$$\oplus \ : \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

και

$$\odot \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ r \odot (x, y) = (rx, ry).$$

Οι πράξεις στα δεξιά μέλη είναι οι γνωστές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών.

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\left(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot\right)$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος.

Άσκηση 2. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με τις πράξεις:

$$\oplus \ : \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$$

και

$$\odot \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ r \odot (x, y) = (rx, ry).$$

Οι πράξεις στα δεξιά μέλη είναι οι γνωστές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών.

Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις, το σύνολο $\mathbb{R}^2$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος. Ποια από τα αξιώματα που διέπουν τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ισχύουν και ποια όχι;

Άσκηση 3. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με τις πράξεις:

$$\oplus \ : \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

και

$$\odot \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ r \odot (x, y) = (0, 0).$$

Η πράξη στο δεξιό μέλος είναι η γνωστή πρόσθεση των πραγματικών αριθμών.

Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις, το σύνολο $\mathbb{R}^2$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος. Ποια από τα αξιώματα που διέπουν τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ισχύουν και ποια όχι;

Άσκηση 4. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, εφοδιασμένο με τις πράξεις:

$$\oplus \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \oplus y = xy$$

και

$$\odot \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ r \odot x = x.$$

Η πράξη στο δεξιό μέλος είναι το γνωστό γινόμενο των πραγματικών αριθμών.

Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις, το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος. Ποια από τα αξιώματα που διέπουν τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ισχύουν και ποια όχι;

Άσκηση 5. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{M}_\nu(\mathbb{R})$ των τετραγωνικών $\nu \times \nu$ πινάκων, εφοδιασμένο με τις πράξεις:

$$\oplus \;:\; \mathbb{M}_\nu(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_\nu(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_\nu(\mathbb{R}),\; A \oplus B = -(A+B)$$

και

$$\odot \;:\; \mathbb{R} \times \mathbb{M}_\nu(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_\nu(\mathbb{R}),\; r \odot A = -(rA).$$

Οι πράξεις στα δεξιά μέλη είναι οι γνωστές πράξεις πρόσθεσης πινάκων και πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού με πίνακα.

Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις, το σύνολο $\mathbb{M}_\nu(\mathbb{R})$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος. Ποια από τα αξιώματα που διέπουν τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ισχύουν και ποια όχι;

Άσκηση 6. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ και έστω τα υποσύνολα αυτού

$$V_1 = \{(\alpha,0,0,0),\ \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ και } V_2 = \{(0,\beta,\gamma,0),\ \beta,\gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Να αποδείξετε ότι τα σύνολα V_1, V_2 είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τα σύνολα $V_1 + V_2$ και $V_1 \cap V_2$.

Άσκηση 7. Να εξετάσετε για κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$ αν αποτελούν υπόχωρο του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$.

$\alpha)$ $V_1 = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 \;:\; \alpha = 2\beta - \gamma,\ \delta = \beta - \gamma\}$.
$\beta)$ $V_2 = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 \;:\; \alpha - 2\beta + \gamma - 5\delta = 0\}$.
$\gamma)$ $V_3 = \{(\alpha\beta, 2\beta, \alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \;:\; \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.
$\delta)$ $V_4 = \{(\alpha, \beta^{2021}, \alpha^{2021}, 1) \in \mathbb{R}^4 \;:\; \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.
$\epsilon)$ $V_5 = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 \;:\; \alpha\beta = \gamma\delta\}$.
$\sigma\tau)$ $V_6 = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 \;:\; \alpha\beta > 0\}$.

Άσκηση 8. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων είναι υπόχωροι:

$\alpha)$ $V_1 = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \;:\; A^2 = A\} \subseteq \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.
$\beta)$ $V_2 = \{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.
$\gamma)$ $V_3 = \{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},\ \alpha\beta > 0\} \subseteq \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.
$\delta)$ $V_4 = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},\ \gamma = \alpha + \beta\} \subseteq \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Άσκηση 9. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο των τετραγωνικών πινάκων $\mathbb{M}_\nu(\mathbb{R})$. Να εξετάσετε τα παρακάτω υποσύνολα αυτού, είναι υπόχωροι αυτού:

$\alpha)$ το σύνολο των συμμετρικών πινάκων.
$\beta)$ το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων
$\gamma)$ το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων.

Άσκηση 10. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι μόνοι υπόχωροί του είναι ο $\{0\}$ και ο $\mathbb{R}$.