ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓ. ΤΑΤΑΚΗΣ Χ.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V
(ΒΑΣΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ)
19/11/2024

Άσκηση 1. Θεωρούμε τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{x} = (2, 1, -4),\ \overrightarrow{y} = (-1, 3, 2),\ \overrightarrow{z} = (3, 1, -6).$$

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένα και να βρεθεί μία σχέση γραμμικής εξάρτησής τους.

Άσκηση 2. Θεωρούμε $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ μία $\mathbb{R}$-βάση του $\mathbb{R}^3$. Να προσδιοριστεί το $z \in \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B}' = \{v_1 + z, v_2, v_3\}$ να είναι επίσης μία $\mathbb{R}$-βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε τον χώρο

$$\mathcal{V} = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha + \beta + \gamma = 0,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Να εξετάσετε αν κάθενα από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathcal{V}$ αποτελούν $\mathbb{R}$-βάση του $\mathcal{V}$:

α) $V_1 = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$.
β) $V_2 = \{(1, 1, -2), (0, 3, -3)\}$.

Άσκηση 4. Δίνεται ο χώρος

$$\mathcal{V} = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \gamma = \alpha - \beta,\ \delta = \alpha + \beta\}.$$

Αφού αποδείξετε ότι ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$, στη συνέχεια ωα προσδιορίσετε μία βάση και τη διάστασή του.

Άσκηση 5. Δίνεται ο χώρος

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

Αφού αποδείξετε ότι ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, στη συνέχεια ωα προσδιορίσετε μία βάση και τη διάστασή του.

Άσκηση 6. Θεωρούμε τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{x} = (2, 4, 0),\ \overrightarrow{y} = (1, 3, -1),\ \overrightarrow{z} = (3, 7, -1).$$

α) Δείξτε ότι το διάνυσμα $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$.
β) Είναι το σύνολο $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\}$ γραμμικά ανεξάρτητο;
γ) Θεωρούμε τους υποχώρους του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{V} = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \rangle,\ \text{και}\ \mathcal{W} = \langle (1, 4, 0), (1, 2, -1) \rangle.$$

Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του υποχώρου $\mathcal{V} + \mathcal{W}$. Είναι το άθροισμα $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ ευθύ;

δ) Να προσδιορίσετε υπόχωρο $\mathcal{U}$ του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $\mathbb{R}^3 = (\mathcal{V} + \mathcal{W}) \oplus \mathcal{U}$.

Άσκηση 7. *(το συμπέρασμα μπορεί να χρησιμοποιείται και ως θεωρία οπουδήποτε κρίνεται αναγκαίο)* Θεωρούμε τον πίνακα $A \in \mathbb{M}_{\nu\times\nu}(\mathbb{F})$, όπου $\mathbb{F}$ τυχαίο σώμα. Να αποδείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν οι στήλες του πίνακα A είναι $\mathbb{F}$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου των πινάκων-στηλών $\mathbb{F}_{\nu\times 1}$. Μπορούμε να πούμε το ίδιο και για τις γραμμές του πίνακα; Να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

Άσκηση 8. Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_3[x]$ θεωρούμε το σύνολο

$$\{x^2-1, x+2, x^2+x\}.$$

Να εξετάσετε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και να βρείτε ένα ευθύ συμπλήρωμα του υποχώρου που παράγει.

Άσκηση 9. Δίνονται τα $\mathbb{F}$-γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ ενός $\mathbb{F}$ διανυσματικού χώρου, όπου $\mathbb{F}$ τυχαίο σώμα. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα

$$u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \ldots, u_1+u_2+\cdots u_n$$

είναι $\mathbb{F}$-γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 10. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο

$$\mathcal{V} = \langle \big(\alpha^2, 0, 1\big), (0, \alpha, 2), (1, 0, 1) \rangle, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε μία βάση και τη διάσταση του χώρου $\mathcal{V}$.

β) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, να εξετάσετε την ισότητα $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

γ) Στις περιπτώσεις όπου $\mathcal{V} \subsetneq \mathbb{R}^3$, να συμπληρωθεί η βάση του $\mathcal{V}$ σε μία βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 11. Να προσδιοριστεί μία βάση και η διάσταση του χώρου λύσεων του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{aligned} 4x + 12y - 7z + 6w &= 0 \\ x + 3y - 2z + w &= 0 \\ 3x + 9y - 2z + 11w &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 12. Δίνεται το σύνολο

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{M}_3(\mathbb{R}).$$

Να εξετάσετε αν το σύνολο $\mathcal{V}$ αποτελεί μία βάση του διανυσματικού χώρου των διαγωνίων πινάκων διάστασης 3×3.

Άσκηση 13. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο

$$\mathcal{V} = \langle (-2, 3, -4, 5, -6), (-1, 2, -3, 4, -5) \rangle.$$

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{(-2, 3, -4, 5, -6), (-1, 2, -3, 4, -5)\}$ είναι βάση του $\mathcal{V}$.

Στη συνέχεια να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{W}$ του $\mathbb{R}^5$ έτσι ώστε $\mathbb{R}^5 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

Άσκηση 14. Θεωρούμε τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:

$$\overrightarrow{x} = (2, -4, 0, 6),\ \overrightarrow{y} = (-4, -6, 0, 2),\ \overrightarrow{z} = (-2, 1, -2, -1),\ \overrightarrow{w} = (3, 9, -4, -2).$$

α) Να βρεθεί μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των διανυσμάτων $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ και $\overrightarrow{w}$.

β) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του χώρου $\mathcal{V} = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w} \rangle$.

γ) Να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{W}$ του $\mathbb{R}^4$ έτσι ώστε $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

Άσκηση 15. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο

$$\mathcal{V} = \langle\ 2\lambda x^2 - \lambda x + 1,\ -9x^2 + 2x - 5,\ 3x^2 + x - 1\ \rangle \subseteq \mathbb{R}_2[x],\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε μία βάση και τη διάσταση του χώρου $\mathcal{V}$.

β) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, να εξετάσετε την ισότητα $\mathcal{V} = \mathbb{R}_2[x]$.

γ) Στις περιπτώσεις όπου $\mathcal{V} \subsetneq \mathbb{R}_2[x]$, να προσδιορίσετε υπόχωρο $\mathcal{U}$ του $\mathbb{R}_2[x]$, έτσι ώστε

$$\mathbb{R}_2[x] = V \oplus \mathcal{U}.$$

Άσκηση 16. Δίνεται ο χώρος

$$\mathcal{V} = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

και ο χώρος

$$\mathcal{U} = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

.

α) Να αποδείξετε ότι οι χώροι $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$.

β) Να προσδιορίσετε μία βάση και τη διάσταση των χώρων $\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{V} + \mathcal{U}, \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

γ) Να εξετάσετε αν ισχύει $\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Άσκηση 17. Δίνεται ο χώρος

$$\mathcal{V} = \langle (1, 2, 1), (2, 2, -2), (1, 3, 3) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

και ο χώρος

$$\mathcal{U} = \langle (1, 2, 2), (2, 2, -6), (2, 3, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

.

α) Να αποδείξετε ότι οι χώροι $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

β) Να προσδιορίσετε μία βάση και τη διάσταση των χώρων $\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{V} + \mathcal{U}, \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

γ) Να εξετάσετε αν ισχύει $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Άσκηση 18. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ και έστω ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ αυτού:

$$\mathcal{V} = \langle (1, 2, 3, 4), (-2, 1, \lambda, 2), (3, 1, 1, 2) \rangle.$$

Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ο $\mathbb{R}$-υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^4$ έχει τη μικρότερη δυνατή διάσταση.