

**Άσκηση 1.** Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 11 \\ 4 & -2 & 12 & 8 \end{pmatrix} \text{ και } \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & 8 & 6 & -2 & -8 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε τις βαθμίδες των πινάκων  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .

**Άσκηση 2.** Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε τη βαθμίδα του πίνακα  $A$ .

**Άσκηση 3.** Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε τη βαθμίδα του πίνακα  $A$ .

**Άσκηση 4.** Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 6 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & \lambda - 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε τη βαθμίδα του πίνακα  $A$ .

**Άσκηση 5.** Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha + 2 \\ \alpha & 3 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Να προσδιορίσετε τους αριθμούς  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\text{rank}(A) = 2$ .

**Άσκηση 6.** Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \alpha x + (3\alpha + 4)y + (2\alpha + 2)z &= 0 \\ \alpha x + (4\alpha + 2)y + (\alpha + 4)z &= 0 \\ 2x + (3\alpha + 4)y + 3\alpha z &= 0 \end{aligned}$$

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha \in \mathbb{R}$ , να λυθεί το σύστημα.

**Άσκηση 7.** Δίνεται το γραμμικό σύστημα :

$$\begin{aligned}x - y + z &= 3 \\x + y + \lambda z &= 1 \\x + \lambda y + z &= \lambda\end{aligned}$$

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να λυθεί το σύστημα.

**Άσκηση 8.** Δίνεται το γραμμικό σύστημα :

$$\begin{aligned}x - 4y + \alpha z &= \alpha + \beta \\ \alpha x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= \beta\end{aligned}$$

Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων του συστήματος.

**Άσκηση 9.** Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x, y, z) = (x + 3z, 3y + z, -x + 6y - z).$$

Να προσδιορίσετε τη βαθμίδα της απεικόνισης  $\varphi$ .

**Άσκηση 10.** Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(x, y, z, w) = (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w).$$

Να προσδιορίσετε τη βαθμίδα της απεικόνισης  $\varphi$ .

**Άσκηση 11.** Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση  $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  της οποίας ο πίνακας στη κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$  είναι ο :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Να προσδιορίσετε τη βαθμίδα της απεικόνισης  $\varphi$ .

**Άσκηση 12.** Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση :

$$\varphi : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x], \varphi(p(x)) = p'(x) - p''(x).$$

Να υπολογίσετε τη βαθμίδα της απεικόνισης  $\varphi$ .

**Άσκηση 13.** Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να εξετάσετε αν οι πίνακες  $A, B$  είναι ισοδύναμοι.

**Άσκηση 14.** Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση:

$$\varphi : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R}), \varphi(X) = AX - XA$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Να προσδιορίσετε τη βαθμίδα της απεικόνισης  $\varphi$ .

**Άσκηση 15.** Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση:  $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$  όπου  $V_1, V_2$  είναι  $\mathbb{F}$ -διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και έστω  $\lambda \in \mathbb{F}$  με  $\lambda \neq 0$ . Να αποδειχθεί ότι  $\text{rank}(\lambda\varphi) = \text{rank}(\varphi)$ .

**Άσκηση 16.** Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις:

$$\varphi_1 : V_1 \longrightarrow V_2 \text{ και } \varphi_2 : V_2 \longrightarrow V_3$$

όπου  $V_1, V_2, V_3$  είναι  $\mathbb{F}$ -διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Να αποδειχθεί ότι:

- α)  $\text{rank}(\varphi_2 \circ \varphi_1) \leq \text{rank}(\varphi_2)$ .
- β) Αν η  $\varphi_1$  είναι επιμορφισμός, τότε  $\text{rank}(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \text{rank}(\varphi_2)$ .
- γ) Αν η  $\varphi_2$  είναι μονομορφισμός, τότε  $\text{rank}(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \text{rank}(\varphi_1)$ .