ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓ. ΤΑΤΑΚΗΣ Χ.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VII
(ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ)
03/12/2024

Άσκηση 1. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση
$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi\left((x,y,z,w)\right) = (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w).$$
Να προσδιορίσετε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα $\ker\varphi$ και μία βάση και τη διάσταση της εικόνας $\mathrm{Im}\varphi$.

Άσκηση 2. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi\left((x,y,z)\right) = (x + 2y, y - z, 2x + 4y).$$
Να προσδιορίσετε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα $\ker\varphi$ και μία βάση και τη διάσταση της εικόνας $\mathrm{Im}\varphi$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση
$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^5,\ \varphi\left((x,y)\right) = (x + 2y, y - x, x + 4y, x + y, y).$$
Να προσδιορίσετε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα $\ker\varphi$ και μία βάση και τη διάσταση της εικόνας $\mathrm{Im}\varphi$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε την απεικόνιση
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi\left((x,y,z)\right) = (y + z, x + z, x + y).$$
Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση φ είναι γραμμική. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι ένας ισομορφισμός.

Άσκηση 5. Να αποδείξετε ότι οι διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}_\nu[x]$ και $\mathbb{R}^{\nu+1}$ είναι ισόμορφοι.

Άσκηση 6. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi\left((x,y,z)\right) = (3x, x - y, 2x + y + z).$$
Να εξετάσετε αν η απεικόνιση φ είναι αντιστρέψιμη και στη περίπτωση που είναι να προσδιορίσετε την απεικόνιση φ^{-1}.

Άσκηση 7. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση
$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi\left((x,y,z,w)\right) = (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w).$$

α) Να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $(1,3,\lambda) \in \mathrm{Im}\varphi$.
β) Να προσδιορίσετε τα $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το διάνυσμα $(1, \lambda_1, 1, \lambda_2) \in \ker\varphi$.

Άσκηση 8. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi\left((x,y,z)\right) = (x + 3z, 3y + z, -x + 6y - z).$$

α) Να προσδιορίσετε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα $\ker\varphi$.
β) Να προσδιορίσετε μία βάση και τη διάσταση της εικόνας $\mathrm{Im}\varphi$.
γ) Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$:

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y + 2z = 0\}$ και $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - 5y + z = 0\}$

Να προσδιορίσετε τους υποχώρους $\varphi(V)$ και $\varphi^{-1}(W)$.

Άσκηση 9. Θεωρούμε τον $\mathbb{K}$ διανυσματικό χώρο V, όπου $\mathbb{K}$ τυχαίο σώμα. Να αποδείξετε ότι:
α) Ο $\mathbb{K}$ διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}$ έχει ακριβώς δύο υποχώρους τους οποίους και να προσδιορίσετε.
β) Κάθε μη μηδενική γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow V$ είναι μονομορφισμός.
γ) Κάθε μη μηδενική γραμμική απεικόνιση $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι επιμορφισμός.

Άσκηση 10. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, έτσι ώστε:

$$\varphi(0,1,1) = (0,1,3), \ \varphi(1,0,1) = (5,4,3), \ \varphi(1,1,0) = (2,0,0).$$

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τον τύπο της απεικόνισης φ.

Άσκηση 11. Θεωρούμε τα διανύσματα $(1,2,0,-4), (2,0,-1,-3) \in \mathbb{R}^4$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, έτσι ώστε

$$\mathrm{Im}\varphi = \langle (1,2,0,-4), (2,0,-1,-3) \rangle.$$

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τον τύπο της απεικόνισης φ.

Άσκηση 12. Θεωρούμε τις $\mathbb{R}$-γραμμικές απεικονίσεις

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \vartheta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Να αποδείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση $\vartheta \circ \varphi$ δεν είναι αντιστρέψιμη.