ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓ. ΤΑΤΑΚΗΣ Χ.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VIII
(ΠΙΝΑΚΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ)
10/12/2024

Άσκηση 1. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ \varphi\left((x, y, z)\right) = (x - y + 2z, y - 3z, 2x + y, z).$$
Να προσδιορίσετε τον πίνακα της απεικόνισης φ από τη βάση
$$\{(1, 0, 2), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$
στη βάση
$$(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)$$

Άσκηση 2. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ και έστω
$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},\ \mathcal{B}_2 = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$$
δύο βάσεις αυτού. Να υπολογίσετε τον πίνακα μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}_1$ στη βάση $\mathcal{B}_2$ και τον πίνακα μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}_2$ στη βάση $\mathcal{B}_1$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ και τον γραμμικό μετασχηματικό $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ για τον οποίο γνωρίζουμε ότι
$$\varphi((1, 0, 0)) = (1, 1, 0),\ \varphi((1, 1, 0)) = (0, 3, 1),\ \varphi((1, 1, 1)) = (0, 4, -1).$$
Να προσδιορίσετε τον πίνακα του μετασχηματισμού φ από τη βάση
$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$
στη βάση $\mathcal{B}$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε την απεικόνιση
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi\left((x, y, z)\right) = (x + 2y, y - z, x + 2z).$$
Να εξετάσετε αν η γραμμική απεικόνιση φ είναι αντιστρέψιμη. Σε περίπτωση που είναι, να υπολογίσετε την φ^{-1}.

Άσκηση 5. Θεωρούμε την απεικόνιση
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi\left((x, y, z)\right) = (2x - z, x + y - z, z).$$

α) Να προσδιορίσετε τον πίνακα $A_{\mathcal{B}}$ της απεικόνισης φ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$:
$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

β) Να προσδιορίσετε τον πίνακα $A_{\mathcal{C}}$ της απεικόνισης φ ως προς την βάση του $\mathbb{R}^3$:
$$\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$$

γ) Να προσδιορίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P, έτσι ώστε $A_{\mathcal{C}} = P^{-1} A_{\mathcal{B}} P$.

δ) Να υπολογιστεί ο πίνακας $(A_{\mathcal{B}})^{\nu}$ για τα διάφορα $\nu \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 6. Θεωρούμε την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

και έστω η $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, της οποίας ο πίνακας αναπαράστασης ως προς την βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

είναι ο

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

α) Να προσδιορίσετε τον τύπο της απεικόνισης φ.

β) Να προσδιορίσετε τον πίνακα $A_{\mathcal{B}}$ της απεικόνισης φ ως προς την βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$.

γ) Να προσδιορίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P, έτσι ώστε $A_{\mathcal{B}} = P^{-1} A_{\mathcal{C}} P$.

δ) Να υπολογιστεί ο πίνακας $(A_{\mathcal{B}})^{\nu}$ για τα διάφορα $\nu \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 7. Θεωρούμε τις $\mathbb{R}$- γραμμικές απεικονίσεις φ και ϑ με πίνακες αναπαράστασης

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ αντίστοιχα,}$$

ως προς τη βάση

$$\mathcal{C} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}.$$

α) Να προσδιορίσετε τον τύπο της γραμμικής απεικόνισης $\varphi + \vartheta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

β) Να προσδιορίσετε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $-3\varphi + 2\vartheta$ ως προς τη δοθείσα βάση $\mathcal{C}$.

Άσκηση 8. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$- γραμμικό ενδομορφισμό $\vartheta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, του οποίου ο πίνακας αναπαράστασης ως προς τη βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C} = \{\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2}, \overrightarrow{\epsilon_3}\},$$

είναι ο

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε τη διάσταση του πυρήνα $\ker\vartheta$ και τη διάσταση της εικόνας $\mathrm{Im}\vartheta$ της απεικόνισης.

Άσκηση 9. Θεωρούμε την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

και την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,0),(0,1)\}$$

Έστω η $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση

$$\vartheta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \vartheta((x,y,z)) = (2x + 5y - 3z, x - 4y + 4z).$$

α) Να προσδιορίσετε τον πίνακα αναπαράστασης $A_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ της απεικόνισης ϑ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$.

β) Να προσδιορίσετε τον πίνακα αναπαράστασης $A_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2}$ της απεικόνισης ϑ ως προς τις βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα:

$$\mathcal{C}_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \text{ και } \mathcal{C}_2 = \{(1,3),(2,5)\}$$

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q για τους οποίους ισχύει

$$A_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2} = QA_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}P$$

Σε περίπτωση που υπάρχουν, να τους προσδιορίσετε.

Άσκηση 10. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση

$$\vartheta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

της οποίας ο πίνακας ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ του $\mathbb{R}^3$ είναι ο

$$A_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

και επιπλέον

$$\mathrm{Im}\vartheta = \langle(1,-1,1)\rangle.$$

Άσκηση 11. Θεωρούμε την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

και την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

Θεωρούμε την $\mathbb{R}$- γραμμική απεικόνιση

$$\vartheta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \vartheta\left((x,y,z)\right) = (x+2y, 2x, -y, -4x-3y).$$

α) Να προσδιορίσετε τον πίνακα αναπαράστασης $A_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ της απεικόνισης ϑ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$.

β) Να προσδιορίσετε βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ των $\mathbb{R}^3$ και $\mathcal{R}^4$ αντίστοιχα, έτσι ώστε ο πίνακας αναπαράστασης $A_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ της ϑ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ είναι ο

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 12. Να προσδιορίσετε την $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση $\vartheta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ της οποίας ο πίνακας ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ του $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα, είναι ο

$$A_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

όπου

$$\mathcal{B}_1 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\} \text{ και } \mathcal{B}_2 = \{(1,0),(0,1)\}$$

Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε τον πίνακα αναπαράστασης $A_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2}$ της απεικόνισης ϑ, όπου $\mathcal{C}_1$ μία βάση του ευθύ συμπληρώματος του πυρήνα $\ker\theta$ και $\mathcal{C}_2$ μία βάση του ευθύ συμπληρώματος της εικόνας $\mathrm{Im}\theta$.