ΘΕΜΑ 1.

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & \alpha & 0 \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

α) Να υπολογιστεί η παράμετρος $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας A να είναι αντιστρέψιμος.

(0.5 μονάδες)

β) Να ορίσετε τη βαθμίδα ενός πίνακα A. Στη συνέχεια, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ να προσδιοριστεί η βαθμίδα του πίνακα A.

(1 μονάδα)

γ) Να υπολογίσετε την $(\nu \times \nu)$-ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 1 & \nu & \cdots & \nu \\ \nu & 2 & \cdots & \nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu & \nu & \cdots & \nu \end{vmatrix}$$

(0.5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2.

α) Έστω $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ και $\mathrm{Tr}(A)$ το ίχνος αυτού. Να αποδείξετε ότι

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = \mathbb{O}.$$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι πίνακες A^2, A, I_2 είναι $\mathbb{R}$-γραμμικά εξαρτημένοι.

(1 μονάδα)

β) Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x - 4y + \alpha z &= \alpha + \beta \\ \alpha x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= \beta \end{aligned}$$

Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να λυθεί το παραπάνω σύστημα.

(1.5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3.

α) Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο

$$\mathcal{V} = \langle(-2, 3, -4, 5, -6), (-1, 2, -3, 4, -5)\rangle.$$

Να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{W}$ του $\mathbb{R}^5$ έτσι ώστε $\mathbb{R}^5 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

(1 μονάδα)

β) Δίνεται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{V} = \langle(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

και ο χώρος

$$\mathcal{U} = \langle(1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

Να προσδιορίσετε μία βάση και τη διάσταση των χώρων $\mathcal{V} + \mathcal{U}, \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.

(2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4. Θεωρούμε την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

και έστω η $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, της οποίας ο πίνακας αναπαράστασης ως προς την βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0, 1, 0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

είναι ο

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

α) Να προσδιορίσετε τον τύπο της απεικόνισης φ.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, έτσι ώστε $A_{\mathcal{B}} = P^{-1} A_{\mathcal{C}} P$, όπου $A_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας της απεικόνισης φ ως προς την βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$. Στη συνέχεια να τον προσδιορίσετε και να επαληθεύσετε τη σχέση.

(2.5 μονάδες)

Καλή επιτυχία!!!