

ΘΕΜΑ 1.

α) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Να εξετάσετε αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και στη περίπτωση που είναι να υπολογίσετε τον A^{-1} .

(05 μόρια)

β) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & \mu \end{pmatrix}$$

Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού μ , να υπολογίσετε τη βαθμίδα του πίνακα A .

(10 μόρια)

γ) Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πίνακες A, B, Γ για τους οποίους ισχύει $A \cdot B \cdot \Gamma = \mathbb{O}$. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον δύο από τους A, B, Γ δεν είναι αντιστρέψιμοι.

(10 μόρια)

ΘΕΜΑ 2.

α) Να εξετάσετε αν το σύνολο

$$V = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4, \alpha\delta = \beta\gamma\}$$

είναι υπόχωρος του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$.

(05 μόρια)

β) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$, να επιλυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} \mu x + y + z &= 1 \\ x + \mu y + z &= \mu \\ x + y + \mu z &= \mu^2 \end{aligned}$$

(15 μόρια)

ΘΕΜΑ 3.

α) Θεωρούμε τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{x} = (2, -4, 0, 6), \vec{y} = (-4, -6, 0, 2), \vec{z} = (-2, 1, -2, -1), \vec{w} = (3, 9, -4, -2).$$

Να βρεθεί μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ και $\vec{w}$.

(10 μόρια)

β) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((x, y, z)) = (y + z, x + z, x + y).$$

Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση φ είναι γραμμική. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η φ είναι ισομορφισμός.

(15 μόρια)

ΘΕΜΑ 4. Θεωρούμε την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ και έστω η $\mathbb{R}$ -γραμμική απεικόνιση $\vartheta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, της οποίας ο πίνακας αναπαράστασης ως προς τη βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{R}^3$, όπου:

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), (0, 1, 0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}$$

είναι ο

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

α) Να προσδιορίσετε τον τύπο της απεικόνισης ϑ .

β) Αν $A_{\mathcal{B}}$ είναι ο πίνακας της απεικόνισης ϑ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$, να προσδιορίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P για τον οποίο να αποδείξετε ότι ισχύει $A_{\mathcal{B}} = P^{-1}A_{\mathcal{C}}P$.

(15 μόρια)

ΘΕΜΑ 5. Θεωρούμε μία βάση $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ και έστω η γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\varphi(\epsilon_1) = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3, \varphi(\epsilon_2) = 2\epsilon_1, \varphi(\epsilon_3) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3$$

Να προσδιορίσετε τη διάσταση του πυρήνα και τη διάσταση της εικόνας της απεικόνισης φ .

(15 μόρια)

Καλή επιτυχία!!!